STAT0041: Stochastic Calculus

Lecture 4 - Optional Stopping Theorem

Lecturer: Weichen Zhao Fall 2025

Key concepts:

- 停时；
- *Doob*停止定理。

本节课我们通过Doob停止定理解释例3.5倍赌策略中产生矛盾的原因。

4.1 停时

每个人生命中都会存在一些特殊的时间比如生日、毕业等。但是对于不同的人来说，同一个事对应的时间却不同，所以在确定的时刻之外，我们也需要关心具有随机性的时间。

在随机过程中，我们关心一类特殊的随机时间——停时，例如先赚一个先目标，又例如在倍赌策略中，赌徒制定的第一次获利就退出赌局，这就是一个停时，下面给出停时的严格定义。

Definition 4.1 (停时)
设 τ 为一个定义在带滤子流的概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), \mathrm{P})$ 上取值于 $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$的随机变量，称$\tau$为一个*(关于流* $(\mathscr{F}_n)$*的)*停时 *(stopping time)*，如果对所有 n，

$$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq n\} \in \mathscr{F}_n.$$

自然地，常数n是一个常数停时。

直观上，停时的定义是说，做出是否在时刻 n 停止这个决定，只依赖于当前时刻 n 所知道的信息，而不依赖于任何未来的信息。例如 Example 3.1 中的赌博模型。赌徒总是根据

先前的历史采取退出策略，例如当一个人赢了 \$500 以获利时退出，或者当一个人损失了 20% 的本金时退出，这个退出时间就是一个停时。

Example 4.2 首达时*(first hitting time)*

$$\tau_A(\omega) := \inf\{n \geq 0 : X_n(\omega) \in A\}$$

是一个停时。

Proof:

$$\{\omega \in \Omega : \tau_A(\omega) \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{\omega \in \Omega : X_k(\omega) \in A\} \in \mathscr{F}_n.$$

■

Proposition 4.3 令 τ 和 σ 为两个 $\mathscr{F}_n$-停时，那么

(1) $\tau \wedge \sigma \triangleq \min(\tau, \sigma)$ 为一个 $\mathscr{F}_n$-停时；

(2) $\tau \vee \sigma \triangleq \max(\tau, \sigma)$ 为一个 $\mathscr{F}_n$-停时；

(3) $\tau + \sigma$ 为一个 $\mathscr{F}_n$-停时。

Proof: 只证(1)，(2)(3)为作业

要证 $\tau \wedge \sigma$为停时, 即要证$\forall n$,

$$\{\tau \wedge \sigma \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

事实上，

$$\{\tau \wedge \sigma \leq n\} = \{\tau \leq n\} \cup \{\sigma \leq n\}.$$

由于τ, σ为停时，$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \{\sigma \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, 所以

$$\{\tau \leq n\} \cup \{\sigma \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

(3) Hint: $\{\tau + \sigma \leqslant n\} = \bigcup_{m=0}^{n} \{\tau \leqslant n - m, \sigma \leqslant m\} \in \mathscr{F}_n$. ■

事件域 $\mathscr{F}_n$ 代表时间 n 之前的信息，对于一个停时 τ，我们也想知道什么是 τ 之前的“信息”，这引出了以下定义

Definition 4.4 (τ-前事件域) 令τ是一个$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n), \mathrm{P})$上的停时，那么

$$\mathscr{F}_\tau \triangleq \{A \in \mathscr{F} \mid \forall n,\ \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq n\} \cap A \in \mathscr{F}_n\} \tag{4.1}$$

称为τ-前事件域 *(event field of τ-past).*

注：解释(4.1)

(1) 首先回到$\mathscr{F}_n$，对于确定性的时刻n，对于任意的 $\forall A \in \mathscr{F}_n$，“到了”时刻$n$，总能判断每一个样本点是否在$A$中，即我们能判断$A$是否发生。

(2) 那么对于停时τ，在任意时刻n，应该首先判断是否已经“到达”这个停时τ, 即$\{\tau(\omega) \leq n\}$是否已经发生。

如果$\{\tau(\omega) \leq n\}$发生，再看事件A是否属于时刻n已知的信息, 即是判断是否有

$$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq n\} \cap A \in \mathscr{F}_n.$$

也就是说对于停时τ到了时刻n，总能判断每一个样本是否在 $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq n\} \cap A$中，因此$\mathscr{F}_\tau$表示$\tau$之前知道的“信息”。

Proposition 4.5 令 τ 和 σ 为两个 $\mathscr{F}_n$-停时，那么

(1) τ 是 $\mathscr{F}_\tau$ 可测的，即对于任意 $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$，$\{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathscr{F}_\tau$；

(2) 如果$\tau \leq \sigma$，那么$\mathscr{F}_\tau \subset \mathscr{F}_\sigma$.

Proof: 作业题 ∎

4.2 Doob停止定理

我们回到例 3.5 倍赌策略

Example 4.6 (倍赌策略(2)) 定义$\tau \triangleq \inf\{n \geq 1, \eta_n = 1\}$, 那么

$$\mathrm{P}(\tau = n) = \frac{1}{2^n}, \quad \mathrm{P}(\tau < \infty) = 1,$$

$$\mathbb{E}\tau = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathrm{P}(\tau = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{1}{2^k} = 2 < \infty.$$

这说明期望意义下退出停时是有限的。而且

$$\xi_\tau = 1,\ \mathbb{E}\xi_\tau \neq \mathbb{E}\xi_0 = 0.$$

其中$\xi_\tau(\omega) \triangleq \xi_{\tau(\omega)}(\omega)$. 这意味着倍赌策略下，赌徒可以稳赚不赔且在有限时间卷钱跑路，这与公平赌博矛盾！然而我们可以具体地计算赌徒在第一次获利之前的负债额

$$\xi_{\tau-1} = \begin{cases} \xi_0 = 0, & \tau = 1 \\ \xi_0 - f_1(\xi_0) = -1, & \tau = 2 \\ \xi_0 - f_1(\xi_0) - f_2(\xi_0, -1) = -3, & \tau = 3 \\ ... & ... \\ \xi_0 - \cdots - f_{n-1}(\xi_0, \underbrace{-1, \cdots, -1}_{n-2}) = -(2^{n-1} - 1), & \tau = n \end{cases}.$$

那么

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi_{\tau-1} &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[\xi_{k-1}\mathbf{1}_{\{\tau=k\}}] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} -(2^{k-1} - 1)\mathrm{P}(\tau = k) \\ &= \quad \sum_{k=1}^{\infty} -(2^{k-1} - 1)\frac{1}{2^k} \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

这说明平均来看在首次获利之前, 赌徒的负债是无穷大。直观上，意味着赌徒在初始时刻就要有无穷大的财富才可以在执行倍赌策略时，确保赌博的“公平性”。这不符合鞅对数学期望有限性的要求。

我们希望的情形是，赌局是公平的，即资产过程是一个鞅的情况下，不论赌徒采取怎么样的退出策略，他都不可能获利，也就是对任意停时τ，

$$\mathbb{E}[\xi_\tau] = \mathbb{E}[\xi_0].$$

接下来我们以定理的形式叙述这个结果，先引入一个必要的定义

Definition 4.7 (停止过程) 设$X = (X_n)$为一个随机过程，τ为一个停时，停止过程 *(stopped process)* X^τ 定义为

$$X_n^\tau(\omega) \triangleq X_{\tau(\omega)\wedge n}(\omega)$$

Theorem 4.8 (Doob选样定理) 令(X_n)是一个$\mathscr{F}_n$-鞅，τ是一个$\mathscr{F}_n$-停时，那么停止过程X^τ是一个$\mathscr{F}_n$-鞅。特别地，

$$\mathbb{E}[X_{\tau\wedge n}] = \mathbb{E}[X_0].$$

如果τ是有界的，

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0].$$

Proof: 我们有

$$\begin{aligned} X_{\tau\wedge n} &= \mathbf{1}_{\tau\geq n+1}X_n + \mathbf{1}_{\tau\leq n}X_\tau \\ &= \mathbf{1}_{\tau\geq n+1}X_n + \sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{\tau=k}X_k \end{aligned}$$

那么由于$\mathbf{1}_{\tau\geq n+1}$, X_n, $\mathbf{1}_{\tau=k}$, X_k都是$\mathscr{F}_n$可测的，所以$X_{\tau\wedge n}$是$\mathscr{F}_n$-适应的。

其次

$$\mathbb{E}|X_{\tau\wedge n}| \leq \mathbb{E}|X_1| + \ldots + \mathbb{E}|X_n| < \infty$$

所以$X_{\tau\wedge n}$是可积的。最后，我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{\tau\wedge(n+1)}|\mathscr{F}_n] &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\tau\leq n}X_\tau + \mathbf{1}_{\tau\geq n+1}X_{n+1}|\mathscr{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[X_{\tau\wedge n} + \mathbf{1}_{\tau\geq n+1}(X_{n+1} - X_n)|\mathscr{F}_n] \\ &= X_{\tau\wedge n} + \mathbf{1}_{\tau\geq n+1}\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|\mathscr{F}_n] \\ &= X_{\tau\wedge n} \end{aligned}$$

所以$X_{\tau\wedge n}$是一个鞅。那么有

$$\mathbb{E}[X_{\tau\wedge(n+1)}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{\tau\wedge(n+1)}|\mathscr{F}_n]] = \mathbb{E}[X_{\tau\wedge n}] = \cdots = \mathbb{E}[X_{\tau\wedge 0}] = \mathbb{E}[X_0].$$

若$\tau < T$是有界的，则

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_{\tau\wedge T}] = \mathbb{E}[X_0]$$

■

注. Doob选样定理说明了在一个“公平”赌局中，赌徒不可能通过一个有界停时的退出策略来增加期望意义下的资金。

下面我们把定理从限制在起始时刻 $t=0$ 推广到有界停时。

Theorem 4.9 (Doob有界停止定理) 设(X_n)是一个$\mathscr{F}_n$-鞅，$\sigma \le \tau < T < \infty$是$(\mathscr{F}_n)$有界停时，那么

$$\mathbb{E}[X_\tau|\mathscr{F}_\sigma] = X_\sigma, \quad \mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_\sigma].$$

Proof: 首先，我们有

$$\mathbb{E}|X_\tau| = \mathbb{E}|\sum_{k=0}^{T} X_k \mathbf{1}_{\{\tau=k\}}| \le \sum_{k=0}^{T} \mathbb{E}|X_k| < \infty.$$

同理 $\mathbb{E}|X_\sigma| < \infty$. 其次，对任意$A \in \mathscr{F}_\sigma \subset \mathscr{F}_\tau$，有

$$\mathbb{E}[X_\tau \mathbf{1}_A] = \sum_{k=0}^{T} \mathbb{E}[X_\tau \mathbf{1}_{\{\tau=k\}} \mathbf{1}_A] = \sum_{k=0}^{T} \mathbb{E}[X_k \mathbf{1}_{A\cap\{\tau=k\}}].$$

由于(X_n)是一个$\mathscr{F}_n$-鞅，所以对任意$B \in \mathscr{F}_k$，$k \le T$

$$\mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_B] = \mathbb{E}[X_k \mathbf{1}_B]$$

由$\mathscr{F}_\tau$的定义

$$\mathscr{F}_\tau \triangleq \{A \in \mathscr{F} \mid \forall n,\ \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \le n\} \cap A \in \mathscr{F}_n\}$$

对任意k, 有

$$A \cap \{\tau = k\} \in \mathscr{F}_k$$

因此

$$\mathbb{E}[X_\tau \mathbf{1}_A] = \sum_{k=0}^{T} \mathbb{E}[X_k \mathbf{1}_{A\cap\{\tau=k\}}] = \sum_{k=0}^{T} \mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_{A\cap\{\tau=k\}}] = \mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_A].$$

同理可证$\mathbb{E}[X_\sigma \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_A]$. 所以

$$\mathbb{E}[X_\tau \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X_\sigma \mathbf{1}_A].$$

这即是$\mathbb{E}[X_\tau|\mathscr{F}_\sigma] = X_\sigma$. ■

注. 相反地，如果一个赌局不可能通过任何有界停止时间策略提高资产的期望，那么直观地看，这个游戏应该是“公平的”，即它是一个鞅。具体地，我们有以下结论：

设(X_n)是一个可积适应过程，那么(X_n)是一个鞅，当且仅当对所有有界停时τ, σ

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_\sigma].$$

4.3 鞅不等式

下面看一个停时定理的应用

Proposition 4.10 (Doob极大值不等式) 设(X_n)是一个鞅，那么对所有的$c > 0$以及$N \in \mathbb{N}$

$$c \cdot \mathrm{P}(\max_{0 \le n \le N} X_n \ge c) \le \mathbb{E}[X_N^+].$$

Doob鞅不等式描述了鞅在时间过程中其最大偏离（即极大值）与它的期望值之间的关系，表明了虽然鞅可能会偏离其期望值，但这种偏离的概率可以被控制。

Proof: 考虑停时

$$\tau = \inf\{n \ge 0, X_n \ge c\} \wedge N$$

以及事件

$$A = \{\max_{0 \le n \le N} X_n \ge c\}$$

那么由Doob停止定理

$$\mathbb{E}X_N = \mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_\tau \mathbf{1}_A + \mathbb{E}X_\tau \mathbf{1}_{A^c} \ge c \cdot \mathrm{P}(A) + \mathbb{E}X_N \mathbf{1}_{A^c},$$

那么

$$c \cdot \mathrm{P}(A) \le \mathbb{E}X_N - \mathbb{E}X_N \mathbf{1}_{A^c} = \mathbb{E}X_N \mathbf{1}_A \le \mathbb{E}X_N^+.$$

∎

注. 若(X_n)为一个下鞅，不等式仍然成立。

Proposition 4.11 (Doob L^P不等式) 设(X_n)是一个鞅，而且对某个$p \geq 1$，$\mathbb{E}|X_n|^p < \infty$, $\forall n$，那么对所有的$c > 0$以及$N \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{P}(\max_{0 \leq n \leq N} |X_n| \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}|X_N|^p}{c^p}.$$

Proof: 若X是一个鞅，则$|X|^p$为一个下鞅，应用Doob极大值不等式即证。 ■